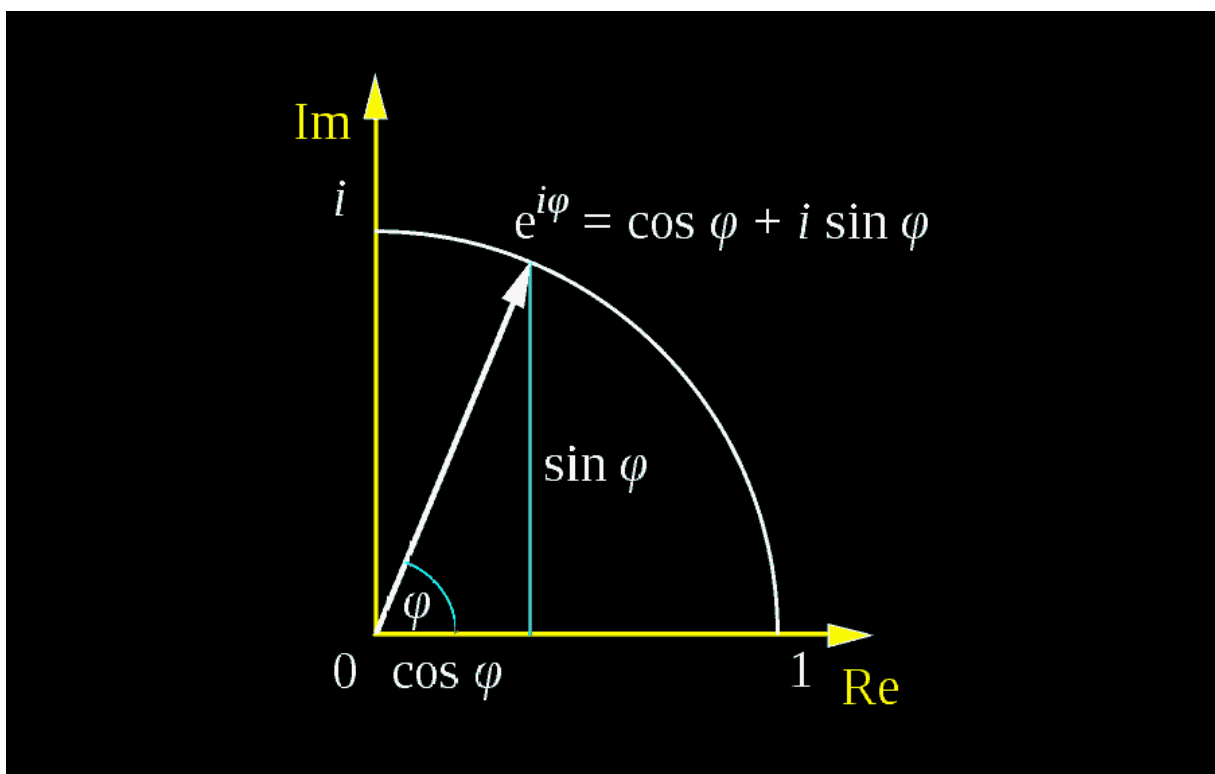


De formule van Euler



Complexe getallen

5 vwo wiskunde D

Docentenhandleiding

Diego Demaree

Inhoud

Inleiding	3
Lesdoelen:	3
Cognitieve niveaus	3
Lesopzet.....	4
Inkorten van de les	6
Extra ondersteuning door de docent	6
Uitwerking opgaven	7
Opgave 1.....	7
Opgave 2.....	7
Opgave 3.....	7
Opgave 4.....	7
Opgave 5.....	8
Opgave 6.....	8
Opgave 7.....	8
Opgave 8.....	9
Opgave 9.....	9
Opgave 10.....	9
Opgave 11.....	9
Opgave 12.....	10
Opgave 13.....	10
Opgave 14.....	10
Referenties	11
Figuren.....	11

Inleiding

Deze docentenhandleiding hoort bij de les over de formule van Euler voor 5 vwo wiskunde D. De les is ontworpen ter vervanging van de paragraaf “Formule van Euler” bij het hoofdstuk complexe getallen van Math4all (Stichting Math4all, z.d.). Deze les kan echter ook bij de andere lesmethodes gebruikt worden. Belangrijk is dan wel dat leerlingen over de volgende voorkennis beschikken:

- Het complexe vlak en vectoren in het complexe vlak
- Modulus en argument en de poolvoorstelling van een complex getal
- De stelling van De Moivre
- De limietdefinitie van het getal e
- Faculteiten (nodig voor het extra materiaal)

De geschiedenis van de wiskunde neemt in deze les een belangrijke rol in, in het bijzonder *Introductio in analysin infinitorum* van Leonhard Euler (Euler, 1748). De bijdrage van Euler aan de wetenschap is enorm geweest en er wordt dan ook wel gesteld dat Euler (een van) de belangrijkste wiskundige(n) aller tijden is. Het is daarom goed dat leerlingen uitgebreid kennismaken met de wiskundige Euler en zijn werk. Aangezien Euler de lezer uitgebreid meeneemt in zijn denkstappen, is het oorspronkelijk materiaal geschikt om in de les te gebruiken. Vandaar dat de primaire bron in deze les uitgebreid aan bod komt.

De les is vormgegeven als een *story* (Agterberg et al., 2022). Leerlingen duiken in het verhaal van de formule van Euler en maken kennis met Euler zelf en de manier waarop hij wiskunde uitlegde. Hiermee wordt de geschiedenis ingezet volgens het *genetic principle*: de leerlingen ontwikkelen begrip rondom een concept aan de hand van de historische ontwikkeling van dat concept (Gulikers & Blom, 2001). De geschiedenis wordt hiermee dus zowel als hulpmiddel (i.e., leren van wiskunde), maar ook als doel (i.e., inzicht in de ontwikkeling van wiskunde als menselijke activiteit en kennis van het geniale werk van Euler) ingezet (Jankvist, 2009).

Bij het uitwerken van de verhaallijn van deze story is naast het oorspronkelijk werk van Euler ook ter inspiratie gebruik gemaakt van een artikel van Sandifer (2007).

Lesdoelen:

De les heeft voor de leerlingen de volgende lesdoelen:

Aan het eind van deze les kan ik:

- de formule van Euler afleiden en aantonen, met behulp van de oorspronkelijke tekst;
- het verband zien tussen goniometrische functies en machtsfuncties;
- Kan ik complexe getallen vermenigvuldigen en delen en machten van complexe getallen berekenen met behulp van de formule van Euler.

Cognitieve niveaus

Deze les is ontworpen voor leerlingen in 5 vwo met wiskunde D. Er is in de lesopbouw rekening gehouden met opbouw in het cognitieve niveau van de opgaven. Zo wordt bijvoorbeeld gestart met een aantal opgaven waar de leerlingen bestaande kennis teruglezen in het werk van Euler (e.g., het getal π , goniometrische formules). Zo maken ze kennis met zijn manier van schrijven zonder dat ze daarbij ook direct complexe wiskunde moeten toepassen (beperken van de cognitieve belasting). Het niveau wordt gaandeweg de lesbrieven verhoogd. Bij de onderbouwing van de cognitieve niveaus wordt gebruikt gemaakt van de vier cognitieve niveaus in wiskundeonderwijs die zijn beschreven door Stein en Lane (1996). De cognitieve niveaus zijn achtereenvolgens, (1) memoriseren, (2) procedures zonder connectie, (3) procedures met connectie, (4) wiskunde bedrijven.

Bij memoriseren gaat het erom dat leerlingen wiskundige begrippen of concepten kennen en zodra dat nodig is ook uit hun geheugen kunnen oproepen. Bij procedures zonder connectie kunnen leerlingen een algoritme toepassen, zonder dat ze daarbij noodzakelijk de achterliggende wiskunde begrijpen of verbindingen kunnen maken met (andere) wiskundige concepten. Bij procedures met connectie kunnen leerlingen algoritmes toepassen, waarbij ze ook verbinding leggen met de onderliggende wiskundige concepten. Dat betekent dat ze de algoritmes ook kunnen aanpassen, of kunnen toepassen in een voor hen nieuwe situatie. Bij wiskunde bedrijven zijn leerlingen in staat complexe problemen aan te pakken die niet algoritmisch kunnen worden opgelost en waarbij er verschillende mogelijkheden bestaan om het probleem aan te pakken.

In onderstaande tabel zijn de beoogde cognitieve niveaus per opgave te vinden:

Opgave	Cognitief niveau	Verantwoording
1	-	Informatie opzoeken.
2	3	Kennis uit eerdere hoofdstukken verbinden met huidige vraag.
3	3	Kennis uit eerdere hoofdstukken verbinden met huidige vraag.
4	2	Haakjes uitwerken volgens bekend algoritme.
5	4	Veralgemeeniseren in vraag c is zelf wiskunde bedrijven.
6	4	Ondanks dat er moet worden ingevuld, vergt het volgen van de stappen en het lezen wat er staat inzicht. Leerlingen bedrijven (samen met Euler) echt wiskunde.
7	4	Verband vinden vergt creativiteit en toepassen van eerdere kennis.
8	3	Factor vinden is toepassen van eerdere kennis. Herleiden is algoritmisch te doen.
9	-	Informatie opzoeken.
10	3	Hierbij wordt de opgedane kennis toegepast in nieuwe situaties.
11	4	Deze opgave vergt creativiteit en het bedrijven van echte wiskunde.
12	2	In deze opgave moeten leerlingen in de materie duiken en precies snappen wat de reeksontwikkeling van de sinus inhoudt. Daarnaast vergt het vinden en begrijpen van materiaal over fouten van Euler creativiteit.
13	4	Bewijzen is echt wiskunde bedrijven.
14	4	Zelf bewijzen zoeken en begrijpen, om ze vervolgens uit te leggen is echt wiskunde bedrijven.

Lesopzet

De les is ontworpen voor een blokkur wiskunde D in de vijfde klas vwo. De les kan op verschillende manieren worden opgebouwd.

In de basis is de les ontworpen zodanig dat leerlingen deze aan de hand van de bronnen en opdrachten zelfstandig kunnen doorwerken (lesbrief). Vanzelfsprekend kan er afwisseling tussen instructie, zelfstandig werken en klassikale uitwisseling worden ingebouwd in deze les. Een voorbeeld lesplanning daarvan wordt hieronder gegeven:

Tijd	Activiteit	Werkvorm	Opmerkingen
5 minuten	Introductie van het onderwerp. Uitleg van de lesopzet.	Klassikale instructie.	
5 minuten	Biografie van Euler.	Zelfstandig werken.	
5 minuten	Uitwisselen biografieën.	Klassikaal nabespreken.	Kan ook in kleine groepen. Interessante wiskunde van Euler kan worden geparkeerd tot een volgende les
20 minuten	Uitwerken goniometrie en stelling van De Moivre.	Zelfstandig werken, werken in duo's.	
10 minuten	Nabespreken opgaven t/m opgave 5 en uitleg vertaling tekst 6, uitleg daaronder op bladzijde 6 en de limietdefinitie van e .	Klassikaal nabespreken, klassikale instructie.	De definitie van e staat iets anders in de verschillende wiskunde B-boeken. Vandaar dat instructie nodig is.
5 minuten	Korte pauze.		Of afsluiting van de les als deze les niet in een blokkur, maar in enkele uren wordt gegeven.
5 minuten	Korte introductie op de volgende opgaven.	Klassikale instructie.	Of ophalen vorige les als de les in twee losse lessen wordt gegeven.
25 minuten	Uitwerken opgaven over de formule van Euler en Euler identiteit tot en met opgave 9.	Werken in duo's.	
15 minuten	Nabespreken opgaven, met name nadruk op juiste formule van Euler. Daarnaast voorbereiding op de huiswerkopdrachten.	Klassikale nabespreking.	Vooraf belangrijk dat leerlingen de juiste formule hebben gekregen, zodat de verwerkings- en toepassingsopgaven kunnen worden gemaakt. Taylorreeks eventueel klassikaal behandelen voor het geval leerlingen daar nog niet eerder mee in aanraking zijn geweest.
5 minuten	Terugblik op de lesdoelen van de story (lesbrief + opgaven t/m opgave 9).	Individueel.	

Huiswerkopdracht individueel: opgave 10 t/m 13.

Huiswerkopdracht drietallen: opgave 14. De volgende les start met (enkele) presentaties van opgave 14.

Inkorten van de les

De les is ontworpen om leerlingen mee te nemen in de prachtige manier waarop Euler wiskunde bedreef en hen het gevoel te geven dat ze daadwerkelijk in zijn voetsporen treden.

De les is echter ook in te korten tot een les voor een enkel uur (met huiswerk), zodat alleen de kern wordt behandeld. In dat geval kan een biografie van Euler kort gegeven worden en kunnen de eerste 5 opgaven worden overgeslagen. In klassikale instructie kan dan de stelling van De Moivre worden herhaald en kan kort aandacht worden besteed aan de schrijfwijze van Euler, zodat de leerlingen de bronnen kunnen volgen. De verwerkingsopdrachten vanaf 10 kunnen worden meegegeven als huiswerk, alhoewel zeker bij deze opgaven op een hoger cognitief niveau het is aan te raden dat leerlingen om hulp kunnen vragen als dat nodig is. In de les van een blokuur worden de leerlingen namelijk voorbereid op deze opdrachten. In een enkel uur ontbreekt het aan die tijd.

Extra ondersteuning door de docent

Hoewel de opzet zodanig is dat leerlingen de les zelfstandig door kunnen werken aan de hand van de lesbrief, is de rol van de docent zeker niet onbelangrijk. Behalve klassikale momenten, zoals in het voorbeeld lesplan, is het ook noodzakelijk dat de docent ondersteuning biedt bij de opgaven. De eerste opgave waar het waarschijnlijk is dat leerlingen hulp nodig hebben, is opgave 5. Leerlingen moeten inzien dat om de stelling van De Moivre aan te tonen, Euler impliciet de stap maakt dat y en z beide worden vervangen door x . Leerlingen kunnen daarbij op weg worden geholpen als ze vastlopen door die hint mee te geven en ze te vragen dan eens te herleiden als ze drie keer dezelfde variabele invullen.

Opgave 6 en 7 en het stuk theorie daarboven zijn erg complex voor leerlingen in 5 vwo. Daar is dus instructie zeker aan te raden, met daarnaast ondersteuning bij het maken van opgave 6 en 7. Het kan goed zijn leerlingen daarbij eerst zelf te laten nadenken en vervolgens samen te laten werken. Elkaars ideeën inspireren hierbij en bij dit soort complexe taken is samen leren vaak effectiever dan alleen leren (Kirschner et al., 2011).

Ook opgave 11 is complex. In deze opgave moeten leerlingen inzicht hebben in de behandelde stof en daarnaast ook formulevaardig zijn. Als ze niet uit deze opgave komen, is het goed om de leerlingen met een hint op weg te helpen. Dit kan bijvoorbeeld de tip zijn om beide e -machten afzonderlijk in de poolvoorstelling te schrijven en dan het product uit te werken. Het is belangrijk dat leerlingen daarna zelf de opgave verder uitwerken en dat deze niet teveel wordt voorgedaan. Op deze manier is er sprake van *scaffolding* waarbij de verantwoordelijkheid weer terug wordt gegeven aan de leerling, zodat ze met kleine ondersteuning wel zelf blijven leren (Van de Pol et al., 2010).

Uitwerking opgaven

Opgave 1

- a. Zie bijvoorbeeld: https://nl.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler. Euler was de meest productieve wis- en natuurkundige. Hij heeft verschillende nieuwe concepten ontwikkeld en bijgedragen aan de huidige wiskundige notatie. Hij heeft aan bijna alle takken van de wiskunde belangrijke bijdragen geleverd. En was daarnaast ook actief in de natuurkunde, geneeskunde, plantkunde en scheikunde. Zijn bijdragen zijn zo veelomvattend dat er al meer dan 100 jaar gewerkt wordt aan het herpubliceren van al zijn werk.
- b. Eigen invulling: bekende voorbeelden zijn onder andere:
 - invoering wiskundige notatie zoals wij die nu kennen, zoals $f(x)$, e , i , π
 - oplossing van het Bazelprobleem: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
 - ontdekking van de formule van Euler (onderwerp van deze les)
 - aantonen dat de zeven bruggen van Königsberg bij een rondwandeling niet allemaal precies één keer konden worden overgestoken. Dit was het begin van de grafentheorie
- c. Eigen invulling

Opgave 2

Wij kennen π als de verhouding tussen de omtrek en diameter van een cirkel. Daaruit volgt dat een cirkel met een straal van 1 een omtrek heeft van 2π . De bewering dat π de halve omtrek van een cirkel met straal 1 is, is dus juist. Daarnaast is een radiaal gedefinieerd als de grootte van een middelpuntshoek van een cirkel waarvan de lengte van de boog gelijk is aan de lengte van de straal. De eenheidscirkel bestaat daarom per definitie uit 2π radialen, waardoor de booglengte van 180° overeenkomt met π radialen.

Opgave 3

Bekend uit de lessen wiskunde B zijn:

$$\sin(y + z) = \sin y \cos z + \cos y \sin z$$

$$\cos(y + z) = \cos y \cos z - \sin y \sin z$$

$$\sin(y - z) = \sin y \cos z - \cos y \sin z$$

$$\cos(y - z) = \cos y \cos z + \sin y \sin z$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi - z\right) = \cos z$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi - z\right) = \sin z$$

$$\sin(\pi - z) = \sin z$$

$$\cos(\pi - z) = -\cos z$$

De overige formules zijn hieruit af te leiden.

Opgave 4

Haakjes uitwerken bij $(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)(\cos z - \sqrt{-1} \sin z) = 1$ levert:

$$(\cos z)^2 - \sqrt{-1} \cos z \sin z + \sqrt{-1} \cos z \sin z - (\sqrt{-1})^2 (\sin z)^2 = 1 \text{ en dus}$$

$$(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1$$

Opgave 5¹

a. $\cos. y. \cos. z - \sin. y. \sin. z + \sqrt{-1}. (\cos. y. \sin. z + \sin. y. \cos. z) = \cos. (y + z) + \sqrt{-1}. (\sin. (y + z))$

Zie ook tekst 128.

b. $(\cos. x + \sqrt{-1}. \sin. x)(\cos. y + \sqrt{-1}. \sin. y)(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z) = (\cos. (x + y) + \sqrt{-1}. \sin. (x + y))(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z) = (\cos. (x + y + z) + \sqrt{-1}. \sin. (x + y + z))$

c. Gebruiken we bovenstaande dan geldt voor $(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)^2$
 $(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z) = \cos. (z + z) + \sqrt{-1}. \sin. (z + z) = \cos. (2z) + \sqrt{-1}. \sin. (2z)$
 dan geldt voor $(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)^3$
 $(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z) = \cos. (z + z + z) + \sqrt{-1}. \sin. (z + z + z) = \cos. (3z) + \sqrt{-1}. \sin. (3z)$
 dan geldt voor $(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)^n$
 $(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z) \dots = \cos. (z + z + z + \dots) + \sqrt{-1}. \sin. (z + z + z + \dots) = \cos. (nz) + \sqrt{-1}. \sin. (nz)$

Opgave 6

$n = i, \quad nz = v, \quad z = \frac{v}{i}, \quad \sin z = \frac{v}{i}, \quad \cos z = 1$

$$\cos. nz = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)^n + (\cos. z - \sqrt{-1}. \sin. z)^n}{2}$$

$$\cos. v = \frac{(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i})^i + (1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2}$$

$$\sin. nz = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)^n - (\cos. z - \sqrt{-1}. \sin. z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

$$\sin. v = \frac{(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i})^i - (1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2\sqrt{-1}}$$

Opgave 7

- De grafiek nadert e
- De grafiek nadert e^2 resp. e^3
- Voor het getal e geldt: $e = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i$. In vraag a en b hebben we gezien dat vervangen van de 1 in de teller door een ander getal ervoor zorgt dat de limiet nadert naar e tot de

¹ Het is aan te raden de uitwerkingen in kleur aan de leerlingen ter beschikking te stellen.

macht van dat getal. Omdat Euler i naar oneindig laat gaan, geldt nu dus ook

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i = e^{v\sqrt{-1}} \text{ en } \lim_{i \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-v\sqrt{-1}}{i}\right)^i = e^{-v\sqrt{-1}}.$$

Opgave 8

- a. Vermenigvuldigen met handige factor:

$$\cos. v = \frac{e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} \rightarrow 2 \cos. v = e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}$$

$$\sin. v = \frac{e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \rightarrow 2\sqrt{-1} \cdot \sin. v = e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}$$

Optellen:

$$2 \cos. v = e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}$$

$$2\sqrt{-1} \cdot \sin. v = e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}$$

$$\begin{array}{r} \hline 2 \cos. v + 2\sqrt{-1} \cdot \sin. v = e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}} + e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}} \rightarrow \\ \cos. v + \sqrt{-1} \cdot \sin. v = e^{v\sqrt{-1}} \end{array}$$

- b. $r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = r \cdot e^{i\varphi}$

Opgave 9

Zie bijvoorbeeld: https://nl.wikipedia.org/wiki/Identiteit_van_Euler.

De formule $e^{i\pi} + 1 = 0$ wordt in navolging van Feynman de mooiste formule aller tijden genoemd, omdat deze formule:

- Opvalt in eenvoud;
- De belangrijkste twee elementen van de natuurlijke getallen bevat, te weten: 0 en 1;
- De belangrijkste drie constanten e , π en i bevat;
- De belangrijkste drie wiskundige bewerkingen: optellen, vermenigvuldigen en machtsverheffen bevat.

Opgave 10

a. $z_1 = 3e^{0i} = 3$, $z_2 = 4,66e^{1,03i}$, $z_3 = e^{\frac{\pi}{2}i}$, $z_4 = 3,91e^{-2,45i}$

$z_5 = 3,1e^{1,8i}$, $z_6 = 4,6e^{1,35i}$, $z_7 = 1,1e^{5,54i}$

b. $13,99e^{1,03i}$

c. $55,69e^{0,70i}$

d. $23606,31e^{-0,41i}$

e. -1

f. $0,24e^{-2,09i}$

g. $0,33e^{-1,8i}$

h. $0,03e^{-3,09i}$

i. $0,02e^{1,11i}$

Opgave 11

We weten $e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i \sin(x+y)$

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$$

$$(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) =$$

$$\cos x \cos y + i \sin x \cos y + i \sin y \cos x + i^2 \sin x \sin y =$$

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\sin x \cos y + \sin y \cos x)$$

En dus $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ en $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$

Opgave 12

- a. Elke term kan worden gevonden door $\frac{\pi^{2n-1}}{(2n-1)!}$ te berekenen (zie voor een uitwerking de eerste vier termen hieronder bij vraag b. De overige termen kunnen op dezelfde wijze worden aangepast).

b. 1^e term: $\frac{\pi}{2} \approx 1,5707963267948966192313216916$

2^e term: $\frac{\frac{\pi^3}{2^3}}{3!} \approx 0.6459640975062462536557565638$

3^e term: $\frac{\frac{\pi^5}{2^5}}{5!} \approx 0.0796926262461670451205055494$

4^e term: $\frac{\frac{\pi^7}{2^7}}{7!} \approx 0.0046817541353186881006854639$

Zoals te zien is, was Euler zonder rekenmachine zeer nauwkeurig in staat deze berekeningen uit te voeren. Hij gaat bij de volgende termen pas bij maximaal de laatste drie termen de mist in.

- c. Eigen invulling. Bijvoorbeeld: <https://www.youtube.com/watch?v=1pWFDOhImok>

Opgave 13

- a. Substitueren van $\varphi = \pi$ levert $e^{i\pi} = \cos \pi + i \cdot \sin \pi \rightarrow e^{i\pi} = -1 + i \cdot 0 \rightarrow e^{i\pi} = -1$

b. $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} \dots$

c. $e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} \dots$

d. $e^{i\varphi} = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} \dots$

e. $e^{i\varphi} = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} \dots + i(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} \dots)$

De Taylorreeks van $\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} \dots$

De Taylorreeks van $\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} \dots$

en dus: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$ ■

Opgave 14

Er zijn verschillende bewijzen van de Euler identity te vinden op internet. Een bewijs dat met enige moeite door de leerlingen te volgen kan zijn, is bijvoorbeeld:

<https://www.youtube.com/watch?v=N3Xxj4xNjIo>.

Referenties

- Agterberg, D. A., Oostdam, R. J., & Janssen, F. J. J. M. (2022). From speck to story: Relating history of mathematics to the cognitive demand level of tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 110(1), 49–64. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10093-6>
- Euler, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum* (Vol. 1). Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.
- Gulikers, I., & Blom, K. (2001). 'A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of the history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 223–258. <https://doi.org/10.1023/A:1014539212782>
- Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 235–261. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9174-9>
- Kirschner, F., Paas, F., & Kirschner, P. A. (2011). Task complexity as a driver for collaborative learning efficiency: The collective working-memory effect. *Applied Cognitive Psychology*, 25, 615–624. doi:10.1002/acp.1730
- Sandifer, E. (2007). *How Euler did it. e, π and i: Why is “Euler” in the Euler identity?* Geraadpleegd op 28 april 2023, van <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2007-08.pdf>
- Stein, M. K., & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation*, 2, 50–80. <https://doi.org/10.1080/1380361960020103>
- Stichting Math4all. (z.d.). *Formule van Euler*. Geraadpleegd op 28 april 2023, van <https://content.math4all.nl/view?comp=vd-e2&subcomp=vd-e23&repo=m4a2015&parent=www.math4all.nl/overzichten/vwo-d-2020/33>
- Van de Pol, J., Volman, M., & Beishuizen, J. (2010). Scaffolding in Teacher–Student Interaction: A Decade of Research. *Educational Psychology Review*, 22(3), 271–296. <https://doi.org/10.1007/s10648-010-9127-6>

Figuren

De afbeelding van Euler op de kaft komt van:

<https://canonijohn.com/2022/08/27/heroes-of-the-faith-leonhard-euler/>

De afbeelding van Eulers identiteit op de kaft komt van:

<https://mathvault.ca/euler-formula/>